極小部分多様体の安定性について(リーマン部分多様体の幾何学)

森, 博

数理解析研究所講究録
276巻 1976年 12-25

極小部分多様体の安定性について

富山大 教育　　森　博

§1.

M^mを orientable m次元 Riemann 多様体, $\bar{M}^n$を n次元 Riemann 多様体, $x: M^m \to \bar{M}^n$を minimal immersion とする。いま $D \subset M^m$を closure compact な領域 (i.e. Dは M^mの open, connected subset で, その closure $\bar{D}$は compact である) で, その境界∂Dが区分的に滑らかであるとする(もちろんDが M^mに等しい場合も考えることができる)。∂Dを固定する trivial でない任意の変分 φ_t (ただし $\varphi_0 = x$) について

$$\frac{d}{dt} \mathrm{Volume}\, \varphi_t(D) \Big|_{t=0} = 0$$

であるが.

$$\frac{d^2}{dt^2} \mathrm{Volume}\, \varphi_t(D) \Big|_{t=0} > 0$$

が、常に成り立つとき、Dは、安定しているという。

ここでの目的は、上記のようなDの安定性に関する結果を述べることである。

1973年 M. do Carmo と J.L. Barbosa の両氏は、次の興味ある結果を得た。

定理1（[1]）. $x: M^2 \to \mathbb{R}^3$, $g: M^2 \to S^2 \subset \mathbb{R}^3$ を $\mathbb{R}^3$ 内の minimal surface と、その Gauss map を表わすものとする。$D \subset M^2$ を closure compact な領域で、その境界が、有限個の区分的に滑らかな曲線から成り立っているものとする。

このとき、Area $g(D) < 2\pi$ ならば、Dは安定である。

続いて、1974年 J. Spruck 氏が、定理1の拡張を試み、J. Spruck と D. Hoffman の両氏によって得られた Sobolev の不等式[5]を利用して、次の結果を得た。

定理2（[18]）. $x: M^2 \to \mathbb{R}^n$ $(n > 3)$ を minimal immersion とし、Dを上記の性質を有するものとする。このとき、正定数C_1があり、$\int_D |K|\,dV < C_1$ ならば Dは安定である。

ただし、Kは、Mの Gauss 曲率、dVは Mの area element を表わす。（ここに、$C_1 = \frac{1}{54\pi}$）

定理3（[18]）．$x : M^m \to \mathbb{R}^n$ $(m \geqq 3,\ n \geqq 4)$ を *minimal immersion* とし、Dを上記の性質を有するものとする。このとき、mのみに依存する正定数$C_2(m)$があり、

$\left(\int_D \|B\|^m dV\right)^{\frac{1}{m}} < C_2(m)$ ならば、Dは、安定である。ただし、BはM^mの第二基本形式で、$\|B\|$は、その *norm* を表わし、dVは、M^mの *volume element* を表わす。

（ここに、$C_2(m) = 2^{-m}\dfrac{m-2}{(1+m)^{1+\frac{1}{m}}}\,\omega_m{}^{\frac{1}{m}}$ ）

注意．*Spruck* 氏は、定理2の定数C_1をnに依存する正定数のように書いておりますが、[5]の *Sobolev* の不等式を検討してみると、上記のような定数になることがわかる。

ここで、*ambient space* $\overline{M}^n$が、一般の *Riemann* 多様体である場合を考えてみることにする。

定理4（[10]）．$\overline{M}^n$ $(n \geqq 4)$を完備、単連結で、断面曲率が、$-b^2 \leqq \overline{K}_\sigma \leqq -\delta b^2$ $(0 \leqq b,\ 0 < \delta \leqq 1)$ を満たすn次元 *Riemann* 多様体とし、M^m $(m \geqq 3)$をそのm次元 *minimal submanifold*，$D \subset M^m$を *closure compact* な領域で、境界∂Dが、区分的に滑らかであるとする。D上の関数fを $f(p) = \mathrm{Max}.\{0,\ \|B\|^2(p) - m\delta b^2\}$ $(p \in D)$ によって定める。このとき、mのみに依存する正数$d_1(m)$が、あって、

$(\int_D f^{\frac{m}{2}} dV)^{\frac{1}{m}} < d_1(m)$ ならば、Dは安定である。(ここに、$d_1(m)$ は、定理3の定数 $C_2(m)$ に等しい。)

注意. 定理4において、$b=0$ の場合、定理3に帰着する。

定理5([10]). $\bar{M}^n$ $(n \geq 4)$ を断面曲率 $\bar{K}_\sigma$ が、$0 < \bar{K}_\sigma \leq b^2$ $(b>0)$ を満たし、injectivity radius の M における下限 $\bar{R}(M^m)$ が、$\bar{R}(M^m) \geq \frac{\pi}{b}$ を満たす n 次元 Riemann 多様体とし、M^m $(m \geq 3)$ をその minimal submanifold とし、Dを定理4と同じ性質をもつものとする。このとき、mにのみ依存する正定数 $d_2(m)$ があって、$[\int_D (\|B\|^2 + mb^2)^{\frac{m}{2}} dV]^{\frac{1}{m}} < d_2(m)$ ならば、Dは安定である。(ここに、$d_2(m) = \frac{1}{\pi} 2^{1-m} \frac{m-2}{(m+1)^{1+\frac{1}{m}}} \omega_m^{\frac{1}{m}}$)

更に、3次元単位球面 S^3 内の minimal surface の領域の安定性について、次のことが、成立する。

定理6([11]). M^2 を3次元単位球面 S^3 内の minimal surface でその Gauss 曲率Kが、$K \leq \frac{a-4}{a-2}$ $(a \geq 4)$ を満たしているものとする。Dを定理1と同じ性質をもつものとする。このとき $\int_D (1-K) dV < \frac{1}{27\pi a}$ ならば、Dは、安定である。

定理6の応用として、Plateau問題の解に関するある結果が、得られる。まず、$x : D$ ($\mathbb{R}^2$の単位球面) $\longrightarrow S^3$ が、$C^2(\overline{D})$写像で、Dにおいて、harmonicかつconformalとし、$x|\partial D$は、∂Dから、S^3内のC^2級 Jordan curve Γへの、homeomorphismを与えるとする。KをDから、写像xのsingularitiesを除いた所で、定義される曲面のGauss曲率とする。するとGauss−Bonnetの公式とR.D. Gulliver氏[3]の結果を用いると次のことが、成立する。

系([11]) $x : D$ ($\mathbb{R}^2$の単位球体) $\to S^3$ を S^3内のC^2級Jordan curve Γに対するPlateau問題の解とする。上記のKが、$K \leqq \frac{a-4}{a-2}$ $(a \geqq 4)$ を満たすものとする。このとき、$\mathrm{Area}\ x(D) + \int_\Gamma k(s)\,ds < 2\pi + \frac{1}{27\pi a}$ ならば、(D, x)は安定である。ここに$\int_\Gamma k(s)\,ds$は、Γのtotal curvatureを表わす。

§2.

以下定理5の証明の概略を述べることにする。

$\overline{M}^n$をn次元C^∞ Riemann多様体とし、そのRiemann計量とRiemann接続をそれぞれ、$\langle\ ,\ \rangle$, $\overline{\nabla}$とする。$M = M^m$をm次元orientable C^∞多様体, $x : M \longrightarrow \overline{M}^n$をminimal immersionとし、$\langle\ ,\ \rangle$, ∇をそれぞれxによって、inducedされたMのRiemann計量, Riemann接続とする。TM, NMをそれぞれMのtangent bundle, normal bundleとし、TM_p, NM_p ($p \in M$) をそれぞれ点pにおけるMのtangent space, normal spaceとする。このとき、Mの第二基本形式Bは、対応 $B: TM \times TM \longrightarrow NM$ で、$B(X, Y) = \bar{\nabla}_X Y - \nabla_X Y = (\bar{\nabla}_X Y)^N$, $X, Y \in TM$, によって与えられる。ここに、$(\quad)^N$ は $\bar{M}$ のtangent vectorをMのnormal spaceへ射影することを表わす。

次に第二変分公式を導くために、いくつかの定義をする。まず、$E \in NM_p$ に対して、$\|B(E)\|^2 = \sum_{i,j} (\langle B(e_i, e_j), E \rangle)^2$ とおく。ここに、$\{e_i\}$ は、TM_p のorthonormal basisである。更に、$\|B\| = (\sum_k \|B(E_k)\|^2)^{\frac{1}{2}}$ とおく。ここに $\{E_k\}$ は、NM_p のorthonormal basisである。$\|B\|$ は、orthonormal basesの取り方に依らないという意味において、well-definedである。$\|B\|$ を第二基本形式Bのnormと呼ぶ。

$\Gamma(NM)$ を NMの C^∞ cross-sectionsの作るvector spaceとし、Laplace operator $\Delta: \Gamma(NM) \to \Gamma(NM)$ の定義をMのnormal connection $\nabla^\perp$ を用いて、

$$(\Delta \nu)(p) = \sum_j \{\nabla^\perp_{e_j} \nabla^\perp_{e_j} \nu - (\nabla^\perp_{\nabla_{e_j} e_j} \nu)\}(p)$$

$\nu \in NM_p$によって、与える。ここで$\{e_j\}$は、TM_pの orthonormal basis である。

$\bar{R}$を$\bar{M}^n$の curvature tensor とするとき、

$$\bar{R}(X) = \sum_j \bar{R}_{e_j, X}\, \xi \quad , \quad X \in T\bar{M}_p$$

と定める。ここで、$\{e_j\}$は、TM_pの orthonormal basis とする。

$D \subset M^m$を closure compact な領域で、その境界∂Dは、区分的に滑らかであるとする。$E \in \Gamma(T\bar{M})$を$E|D$は、D上の normal vector field, $E|\partial D \equiv 0$とし、φ_tを($\bar{M}^n$内の) Dの近傍において、Eによって生成される flow とし、$A(t) = \text{Volume}\ \varphi_t(D)$とおく。このとき第二変分公式は、次の式で表わされる。

$$\left.\frac{d^2A}{dt^2}\right|_{t=0} = -\int_D \{\langle E, \Delta E\rangle + \|B(E)\|^2 - \langle \bar{R}(E), E\rangle\}\, dV$$

そこで、$E = u\nu$ (νは、D上の unit normal vector field, uは、$\bar{D}$上のC^∞ function で、∂D上で、vanish する) とおいて、上の変分公式を書き直すと、次の Lemma が、成立する。

Lemma 1. $\bar{M}^n, M^m, D$は、定理5の仮定を満たすとする。このとき、$\left.\dfrac{d^2A}{dt^2}\right|_{t=0} \geqq -\displaystyle\int_D \{u\Delta u + (\|B\|^2 + mb^2)\,u^2\}\, dV$

$$= \int_D \{ |\nabla u|^2 - (\|B\|^2 + m b^2) u^2 \} \, dV$$

が、成立する。ここに ∇u は、u の gradient vector field である。

定理5の正定数 $d_2(m)$ の存在は、次の Lemma から、わかる。

Lemma 2. $\bar{M}^n$, M, D は、定理5と同じとする。h を $\bar{D}$ 上で、non-negative C^1 級関数で、∂D 上で、vanish するものとする。このとき、

$$\left[\int_D h^{\frac{2m}{m-2}} dV \right]^{\frac{m-2}{2m}} \leqq d_2^{-1} \left(\int_D |\nabla h|^2 dV \right)^{\frac{1}{2}}$$

が、成立する。ただし、次の条件を満たすものとする。

$$\text{(i)}\ b \left[\frac{\mathrm{Vol}(\mathrm{supp}\, h)}{(1-\alpha)\,\omega_m} \right]^{\frac{1}{m}} \leqq \frac{1}{2}, \quad \text{(ii)}\ 2\rho \leqq \bar{R}(M^m)$$

ここに、$\rho = \frac{1}{b} \sin^{-1} \left[2b \left(\frac{\mathrm{vol}(\mathrm{supp}\, h)}{(1-\alpha)\,\omega_m} \right)^{\frac{1}{m}} \right]$,

$d_2 = d_2(m, \alpha) = \frac{1}{\pi} 2^{1-m} \alpha (1-\alpha)^{\frac{1}{m}} \frac{m-2}{m} \omega_m^{\frac{1}{m}}$, α は、$0 < \alpha < 1$ なる free parameter, ω_m は、$\mathbb{R}^m$ の単位球体の体積とする。

注意．$d_2(m, \alpha)$は．$\alpha = \frac{m}{m+1}$のとき．最大値をとり．更に定理5の$d_2(m)$に等しい。hの仮定"$\bar{D}$上でC^1級である"を"$h \in H_1^0(D)$"に代えても成立する。ここに$H_1^0(D)$は．Sobolev spaceである。また容易に．定理5の条件から．Lemma 2の条件(i)．(ii)が．満たされることが．わかる。J. Spruck と D. Hoffman の両氏の得た Sobolev の不等式の証明に．gap がありますが．上記の Lemma 2は．その gap を補正した後に適用することによって．得たものである。

定理5の証明

Dが．安定であることを示すには．Lemma 1によって．

仮定 $\left(\int_D (\|B\|^2 + m h^2)^{\frac{m}{2}} dV \right)^{\frac{1}{m}} < d_2(m)$ から．

$$(1) \quad \int_D (\|B\|^2 + m h^2) u^2 dV < \int_D |\nabla u|^2 dV$$

for all $u \not\equiv 0$ in $H_1^0(D)$

であることを示すとよい。このことを背理法を用いて．示す。つまり．

$$(2) \quad \int_D |\nabla u|^2 dV \leqq \int_D (\|B\|^2 + m h^2) u^2 dV$$

for some $u \not\equiv 0$ in $H_1^0(D)$

であると仮定して矛盾を導く。Sobolev space $H_1^0(D)$ の性質から不等式(2)における u が "$u \geqq 0$ on $\bar{D}$" であるとしてよい。すると lemma 2 の注意から、

$$(3) \quad \left(\int_D u^{\frac{2m}{m-2}} dV\right)^{\frac{m-2}{2m}} \leqq d_2(m)^{-1} \left(\int_D |\nabla u|^2 dV\right)^{\frac{1}{2}}$$

(2), (3) と Hölder の不等式から

$$\left(\int_D u^{\frac{2m}{m-2}} dV\right)^{\frac{m-2}{2m}} \leqq d_2(m)^{-1} \left(\int_D (\|B\|^2 + m b^2) u^2 dV\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqq d_2(m)^{-1} \left[\left(\int_D (\|B\|^2 + m b^2)^{\frac{m}{2}} dV\right)^{\frac{2}{m}} \left(\int_D u^{\frac{2m}{m-2}} dV\right)^{\frac{m-2}{m}}\right]^{\frac{1}{2}}$$

従って

$$\left(\int_D (\|B\|^2 + m b^2)^{\frac{m}{2}} dV\right)^{\frac{1}{m}} \geqq d_2(m)$$

となり、矛盾が生ずる。故に定理5が示されたことになる。

§3.

定理5の例を述べることにする。まず、ambient space $\bar{M}^n$ を標準的な Riemann 計量を持つ $(m+1)$ 次元単位球面 S^{m+1} $(n=m+1)$ とする。$\bar{M}^{m+1}$ は明らかに $b=1$ に対して定理5の仮定を満たしている (i.e. $\bar{K}_\sigma \equiv 1$ かつ $\bar{R}(\bar{M}) \equiv \pi$)。

次に、$0 < \alpha < 1$ なる実数 α に対して

$$\Sigma_\alpha^m = \{x = (x^1, \cdots, x^{m+1}) \in S^m ;\ x^{m+1} \geq \alpha\}$$

とおく。ここに S^m は、m 次元単位球面とする。このとき、Σ_α^m は、S^{m+1} の compact orientable，n 次元 totally geodesic submanifold で、境界 $\partial\Sigma_\alpha^m = \{x = (x^1, \cdots, x^{m+1}) \in S^m ;\ x^{m+1} = \alpha\}$ を持つ。他方 $\mathrm{Vol}\,\Sigma_\alpha^m$ は、α に関する単調減少、連続関数で、$\alpha \to 1$ のとき $\mathrm{Vol}\,\Sigma_\alpha^m \to 0$ である。

従って、定理5の条件、つまり、

$$\left(\int_{\Sigma_\alpha^m} (\|B\|^2 + m)^{\frac{m}{2}} dV\right)^{\frac{1}{m}} = m^{\frac{1}{2}} (\mathrm{Vol}\,\Sigma_\alpha^m)^{\frac{1}{m}} < d_2(m)$$

を満たす α が、存在する。故に、ある α $(0 < \alpha < 1)$ が、存在して、"S^{m+1} 内に、境界を持つ compact orientable，m 次元 totally geodesic（それ故 minimal）submanifold Σ_α^m が、安定である" が、成立する。次に別の例を構成するために、$\mathbb{R}^{m+2}$ を $\mathbb{R}^{p+1}$ と $\mathbb{R}^{q+1}$ の直積と考え、

$$\Sigma_\alpha^p(r) = \{x = (x^1, \cdots, x^{p+1}) \in S^p(r) ;\ x^{p+1} \geq \alpha\}$$
$$\Sigma_\beta^q(s) = \{y = (y^1, \cdots, y^{q+1}) \in S^q(s) ;\ y^{q+1} \geq \beta\}$$

とおく。ここに $p + q = m$；$r, s > 0$，$r^2 + s^2 = 1$；$0 < \alpha, \beta < 1$ であり、$S^p(r)$ は、$\mathbb{R}^{p+1}$ の原点を中心とする半径 r の球面とし、$S^q(s)$ についても、同様とする。

このとき $M := \Sigma_\alpha^p(r) \times \Sigma_\beta^q(s)$ は、S^{m+1} 内の compact orientable submanifold で、その境界は、

$(\partial\Sigma_\alpha^p(r)\times\Sigma_\beta^q(s))\cup(\Sigma_\alpha^p(r)\times\partial\Sigma_\beta^q(s))$ である。

ところで、Mの第二基本形式Bは、固有値として、

$\frac{s}{r}$ (multiplicity p) と、$-\frac{r}{s}$ (multiplicity q) を持つから、Mが、minimal であるための必要十分条件は、$r=\sqrt{\frac{p}{m}}$, $s=\sqrt{\frac{q}{m}}$ である。よって、Mが、minimal であるならば、$\|B\|^2=m$ となる。従って、先程の例の構成の議論から，定理5の条件、つまり、

$$\left(\int_{\Sigma_\alpha^p(\sqrt{\frac{p}{m}})\times\Sigma_\beta^q(\sqrt{\frac{q}{m}})}(\|B\|^2+m)^{\frac{m}{2}}\,dV\right)^{\frac{1}{m}}$$

$$=(2m)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{Vol}\,\Sigma_\alpha^p\left(\sqrt{\tfrac{p}{m}}\right)\cdot\mathrm{Vol}\,\Sigma_\beta^q\left(\sqrt{\tfrac{q}{m}}\right)<d_2(m)$$

を満たす、α, β が、存在する。故に、ある α, β $(0<\alpha,\beta<1)$ が存在して、"S^{m+1} 内に、境界を持つ、compact orientable m 次元 minimal submanifold $\Sigma_\alpha^p(\sqrt{\frac{p}{m}})\times\Sigma_\beta^q(\sqrt{\frac{q}{m}})$ が、安定である。" が、成立する。

この minimal submanifold は、明らかに、totally geodesic でない。

References

[1] J. L. Barbosa and M. do Carmo, On the size of a stable minimal surface in R^3, preprint (1973).

[2] S. S. Chern, Minimal submanifolds in a Riemannian manifold, Mimeographed Lecture Notes, Univ. of Kansas, 1968.

[3] R. D. Gulliver II, Regularity of minimizing surfaces prescrived mean curvature, Ann. of Math., Vol.97 (1973), 275 - 305.

[4] E. Heinz and S. Hildebrandt, Some remarks on minimal surfaces in Riemannian manifolds, Comm. Pure and Appl. Math., Vol.23 (1970), 371 - 377.

[5] D. Hoffman and J. Spruck, Sobolev and isoperimetric inequalities for Riemannian submanifolds, Comm. Pure and Appl. Math., Vol.27 (1974), 715 - 727.

[6] ———— , A correction to [5], Comm. Pure and Appl. Math., Vol.28 (1975), 765 - 766.

[7] S. Kobayashi and K. Nomizu, Foundations of differential geometry, Vol.II, Interscience, New York, 1969.

[8] H. B. Lawson, Jr., Minimal varieties in constant curvature manifolds, Ph. D. thesis, Stanford Univ., 1968.

[9] ———— , Minimal Varieties in Real and Complex Geometry, Univ. of Montréal Press, Montréal, 1973.

[10] H. Mori, Notes on the stability of minimal submanifolds of Riemannian manifolds, preprint (1975).

[11] H. Mori, A note on the stability of minimal surfaces of 3-dimensional unit sphere, preprint (1976).

[12] C. B. Morrey, Jr., Multiple Integrals in the Calculus of Variations, Springer - Verlag, New York, 1966.

[13] R. Osserman, A proof of the regularity everywhere of the classical solution to Plateau's problem, Ann. of Math., Vol.91 (1970), 550 - 569.

[14] T. Ōtsuki, A remark on the Sobolev inequality for Riemannian submanifolds, Proc. Japan Acad., Vol.51 (1975), 785 - 789.

[15] S. Sasaki, Differential Geometry in the large (in Japanese), Shibundō, Tokyo, 1957.

[16] ———— , On the total curvature of a closed curve, Japan J. Math., Vol.29 (1959), 118 - 125.

[17] J. Simons, Minimal varieties in Riemannian manifolds, Ann. of Math., Vol.88 (1968), 62 - 105.

[18] J. Spruck, Remarks on the stability of minimal submanifolds of R^n, preprint (1974).